МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЛУГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ВЛАДИМИРА ДАЛЯ»

Факультет компьютерных систем и информационных технологий

Кафедра прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета компьютерных систем и информационных технологий
_______________ Кочевский А. А.
«__9__» ___август___ 2023 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по учебной дисциплине

«Общая теория рядов Фурье»

01.04.02 Прикладная математика и информатика

«Математическое моделирование сложных систем»

Разработчик:
профессор _______________ Таращанский М. Т.
доцент ____________________ Щелоков В. С.

ФОС рассмотрен и одобрен на заседании кафедры прикладной математики от 18 апреля 2023 г., протокол № 10

Заведующий кафедрой ____________________________________ Малый В. В.

Луганск 2023 г.

Паспорт
фонда оценочных средств по учебной дисциплине
«Общая теория рядов Фурье»

Перечень компетенций (элементов компетенций), формируемых в результате освоения учебной дисциплины

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Формулировка контролируемой компетенции	Контролируемые темы учебной дисциплины	Этапы формирования (семестр изучения)
1	ОПК-1	способен решать актуальные задачи фундаментальной и прикладной математики	Тема 1. Элементы теории множеств Тема 2. Линейные функциональные пространства Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы. Тема 4. Гильбертовы пространства. Общая теория рядов Фурье	базовый (1)

Показатели и критерии оценивания компетенций, описание шкал оценивания

№ п/п	Код контролируемой компетенции	Показатель оценивания (знания, умения, навыки)	Контролируемые темы учебной дисциплины	Наименование оценочного средства
1	ОПК-1	*знать*: определение метрического пространства, полного метрического пространства, примеры метрических пространств; определение открытых, замкнутых, ограниченных, всюду плотных, нигде не плотных множеств в метрических пространствах; принцип вложенных шаров в полном метрическом пространстве; принцип сжимающих	Тема 1. Элементы теории множеств Тема 2. Линейные функциональные пространства Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы. Тема 4. Гильбертовы пространства. Общая теория рядов Фурье	фронтальные и индивидуальные опросы, индивидуальные задания, контрольные работы, промежуточная аттестация (экзамен)

		отображений и примеры его применения к алгебраическим, дифференциальным и интегральным уравнениям; ___________ определение компактного множества в метрическом пространстве, критерий компактности Хаусдорфа; критерий компактности множеств в пространствах $C_{[a,b]}$ и $l_p, p \geq 1$; определение линейного нормированного пространства, банахова пространства, примеры линейных нормированных пространств; определение линейного функционала и линейного оператора; ___________ определение ограниченного линейного функционала и ограниченного линейного оператора, понятие нормы функционала и оператора; общий вид непрерывного линейного функционала в $C_{[a,b]}$ и $l_p, p \geq 1$; теоремы Хана-Банаха, Банаха-Штейнгауза, Банаха об обратном операторе; понятие предгильбертова и гильбертова пространства, примеры гильбертовых пространств; __ понятие проекции вектора на подпространство в гильбертовом пространстве, понятие ортогонального дополнения; ___ ортонормированные системы векторов в		

		гильбертовых пространствах, полиномы Лежандра; коэффициенты Фурье и их минимальное свойство, ряды Фурье; неравенство Бесселя и равенство Парсеваля; полнота тригонометрической системы в $L_2[a,b]$; теорема Рисса об общем виде непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве. *уметь*: использовать основные понятия и методы функционального анализа; решать типовые задачи; использовать утверждения и теоремы функционального анализа при исследовании математических моделей на предмет существования решения, построения приближенного решения, устойчивости построенной апроксимационной схемы приближенного решения, обращаться к информационным системам (Интернет, справочная и другая математическая литература) для пополнения и уточнения математических знаний. *владеть навыками*: применения понятийного аппарата и методов функционального анализа для выражения количественных и качественных отношений, математическими		

		методами и алгоритмами в приложениях к техническим наукам.		

Фонды оценочных средств по дисциплине
«Общая теория рядов Фурье»

Вопросы для фронтальных и индивидуальных опросов:

Тема 1. Элементы теории множеств.

1. Доказать тождества: $A\setminus B = A\cup\overline{B}$; $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$; $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$; $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$; $A\setminus B = A\setminus(A\cap B)$; $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)=(A\cap B)\setminus C$; $(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus(B\setminus C)$; $A\cup B = A\cup(B\setminus A)$; $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})=A$; $(\overline{A}\cup B)\cap A = A\cap B$; $A\cap(B\setminus A)=\varnothing$; $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$; $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$; $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C$.

2. Доказать, что если отношения $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$ симметричны, то симметричны и отношения $\mathbf{\Phi}_1\cup\mathbf{\Phi}_2$; $\mathbf{\Phi}_1\cap\mathbf{\Phi}_2$; $\mathbf{\Phi}_1^{-1}$; $\mathbf{\Phi}_1\cdot\mathbf{\Phi}_2^{-1}$.

3. Пусть $f: X\to Y, A\in X, B\in Y$. Доказать, что $f(A)\cap B = f(A\cap f^{-1}(B))$; $f(A)\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A\cap f^{-1}(B)=\varnothing$; $f(A)\subset B\Leftrightarrow A\cap f^{-1}(B)$

4. Пусть $f: X\to Y, A\in X, B\in Y$. Доказать, что $f(A)\subset B\Leftrightarrow A\cap f^{-1}(B)$; $f(A)\cap B=\varnothing \Leftrightarrow A\cap f^{-1}(B)=\varnothing$

5. Доказать, что объединение $\phi_1\cup\phi_2$ эквивалентностей ϕ_1 и ϕ_2 на A является эквивалентностью на A тогда и только тогда, когда $\phi_1\cup\phi_2=\phi_1\circ\phi_2$.

6. Доказать, что произведение $\phi_1\circ\phi_2$ эквивалентностей ϕ_1 и ϕ_2 на A является эквивалентностью на A тогда и только тогда, когда $\phi_2\circ\phi_1=\phi_1\circ\phi_2$.

7. Вывод формул двойственности для теоретико-множественных операций.

8. Доказать счетность объединения не более чем счетного набора счетных множеств.

9. Доказать, что при добавлении к бесконечному множеству конечного или счетного множества образуется множество, эквивалентное исходному.

Тема 2. Линейные функциональные пространства.

10. Из каких элементов состоит пространство l^2? Приведите пример элемента $x\in l^2$ и пример элемента $y\notin l^2$.

11. Как вычисляются расстояние, норма, скалярное произведение в пространстве l^2?

12. Из каких элементов состоит пространство $C[0;1]$? Приведите пример элемента $x \in C[0;1]$ и пример элемента $y \notin C[0;1]$.

13. Как вычисляются расстояние и норма в пространстве $C[a;b]$?

14. Из каких элементов состоит пространство $C^1[0;1]$? Приведите пример элемента $x \in C^1[0;1]$ и пример такого элемента y, что $y \in C[0;1]$, $y \notin C^1[0;1]$.

15. Из каких элементов состоит пространство $C^k[a;b]$? Как между собой упорядочены пространства $C^k[a;b]$ при разных $k = 1,2,3,\ldots$?

16. Из каких элементов состоит пространство $L^2(0;1)$? Приведите пример элемента $x \in L^2(0;1)$ и пример элемента $y \notin L^2(0;1)$.

17. Привести (с обоснованием) примеры метрических и нормированных пространств (включая $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, $C^1[a,b]$, l_1, l_2).

18. Вывести неравенство Коши–Буняковского и ввести стандартную норму в предгильбертовом пространстве. Привести примеры предгильбертовых пространств и нормированных пространств, не являющихся предгильбертовыми.

19. Вывести тождество параллелограмма и, используя его, привести примеры нормированных пространств, для которых норма не порождается какими-либо скалярными произведениями.

20. Сформулировать теорему об эквивалентности любых двух норм в конечномерном нормированном пространстве. Вывести следствия, касающиеся полноты и сепарабельности конечномерных нормированных пространств.

21. Привести примеры открытых множеств (включая лежащие в $C[a,b]$). Доказать теорему об объединениях и пересечениях открытых множеств и (схематично) теорему о структуре открытых множеств вещественной прямой.

22. Привести примеры замкнутых множеств. Доказать *а)* теорему, характеризующую замкнутые множества как дополнения к открытым, и *б)* теорему об объединениях и пересечениях замкнутых множеств.

23. Доказать теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей точек.

24. Доказать: если некоторое множество плотно в другом, которое плотно в третьем, то и исходное множество плотно в третьем. Установить сепарабельность пространств R^n, $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, l_1 и l_2 и привести пример несепарабельного метрического пространства.

25. Установить полноту пространств R^n, $C[a,b]$, l_1, l_2 и привести примеры неполных метрических пространств.

Тема 3. Нормированные пространства, линейные операторы и функционалы.

26. Сформулировать теорему об эквивалентности любых двух норм в конечномерном нормированном пространстве. Вывести следствия, касающиеся полноты и сепарабельности конечномерных нормированных пространств.
27. Привести примеры открытых множеств (включая лежащие в $C[a,b]$). Доказать теорему об объединениях и пересечениях открытых множеств и (схематично) теорему о структуре открытых множеств вещественной прямой.
28. Привести примеры замкнутых множеств. Доказать *а)* теорему, характеризующую замкнутые множества как дополнения к открытым, и *б)* теорему об объединениях и пересечениях замкнутых множеств.
29. Доказать теорему, характеризующую замкнутые множества в терминах сходящихся последовательностей точек.
30. Доказать: если некоторое множество плотно в другом, которое плотно в третьем, то и исходное множество плотно в третьем. Установить сепарабельность пространств R^n, $C[a,b]$, $C_2[a,b]$, l_1 и l_2 и привести пример несепарабельного метрического пространства.
31. Установить полноту пространств R^n, $C[a,b]$, l_1, l_2 и привести примеры неполных метрических пространств.
32. Доказать эквивалентность свойств непрерывности и ограниченности линейных отображений (операторов). Привести примеры таких операторов, включая интегральные операторы.
33. Привести примеры сжимающих отображений. Доказать теорему о неподвижной точке сжимающего отображения. Как найти такую точку с заранее заданной точностью?
34. Рассказать о приложениях теоремы о неподвижной точке в теории интегральных уравнений. Показать на примере, как строятся последовательные приближения к такой точке.
35. Примеры пополнений метрических пространств. Сформулируйте теорему о существовании пополнений. Какие особенности имеет случай нормированных пространств?

Тема 4. Гильбертовы пространства. Методы функциональной теории.

36. Доказать теорему Пифагора (необходимое и достаточное условие сходимости ортогонального ряда в гильбертовом пространстве). Сформулировать достаточное условие сходимости ряда в банаховом пространстве. Привести примеры применения этих теорем.
37. Доказать существование и единственность ортогональной проекции точки гильбертова пространства на произвольное подпространство. Как связаны понятия проекции и элемента наилучшего приближения?
38. Вывести общее неравенство Бесселя и объяснить его связь с классическим неравенством Бесселя.
39. Как из неравенства Бесселя вывести утверждение о сходимости ряда Фурье в гильбертовом пространстве?

40. Доказать, что коэффициенты разложения элемента гильбертова пространства по ортонормированной системе совпадают с соответствующими коэффициентами Фурье.
41. Доказать теорему о разложении в ряд Фурье по ортонормированному базису и вывести ее следствие для классических рядов Фурье.
42. Вывести критерий полноты ортогонального семейства и доказать теорему о существовании ортонормированных базисов. Привести примеры таких базисов.
43. Доказать теорему об изоморфизме сепарабельных вещественных гильбертовых пространств одинаковой размерности.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «фронтальный и индивидуальный опрос»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Контрольные работы:

Типовые варианты контрольных работ

Вариант 1.

1. Доказать, что любое измеримое множество E на прямой с мерой $(E(= p > 0$ содержит измеримое подмножество меры q, $0<q<p$.

2. Эквивалентны ли метрики $\rho(f,g)=\max\limits_{[a,b]} |f(x)-g(x)|$ и

$\sigma(f,g)=\int\limits_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$ на $C[a,b]$?

Вариант 2.

1. Пусть Е – измеримое на сегменте $[0,1]$ и для любого интервала Δ имеет место неравенство $(E\cap\Delta(\le \alpha(\Delta($, $\alpha<1$. Доказать, что $(E(=0$.
2. Пусть (a_n) и $(b_n)-$ последовательности точек нормированного пространства X, причём (a_n) сходится, а (b_n) расходится. Сходится ли последовательность (a_n+b_n)?

Вариант 3.

1. Пусть A_1 и A_2 – измеримые подмножества сегмента $[0,1]$ и $(A_1(+(A_2(>1$. Доказать, что $(A_1\cap A_2(>0$.
2. Привести пример фундаментальной, но не сходящейся последовательности в пространстве **R** с метрикой $\rho(x,y)=\dfrac{|x-y|}{|x-y|+1}$.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «контрольная работа»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
Зачтено	Правильность решения заданий составляет 90-100%
Не зачтено	Правильность решения заданий составляет менее 90%

Варианты индивидуальных заданий:

Типовые варианты индивидуальных заданий

Вариант 1.

1. Для линейного непрерывного функционала F, действующего в гильбертовом пространстве, найти представление $F[x]=(u,x)$, определить элемент u и норму функционала F.

$$F: L^2(-1;1)\to R,\quad F[x]=\int\limits_0^1 \sqrt[3]{t^2}\,x\left(t^3\right)dt+\int\limits_{-1}^1 t^2 x\left(t^2\right)dt$$

2. Является ли метрикой на множестве **R** следующая функция:
   а) $\rho(x,y)=|x-y|^2$; б) $\rho(x,y)=arctg\,|x-y|$; в) $\rho(x,y)=\|x|-|y\|$?

3. Выяснить, сходятся ли в $C[0,1]$ последовательности: а) $f_n(x)=x^n$; б) $g_n(x)=x^n-x^{n+1}$; в) $h_n(x)=x^n-x^{2n}$.

4. Пусть функция $f(x)=1/\sqrt{x}$ для иррациональных $x>0$ и $f(x)=x^3$ для рациональных x. Вычислить $\int\limits_0^1 f(x)dx$.

5. Исследовать решение интегрального уравнения $y(x)=\lambda\int\limits_{-1}^{1}(1+xs)y(s)ds+x^2$

6. Дана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением. Найти расстояние между элементами x и y.

$$x=e_2+\frac{e_3+2e_4}{3}+e_7,\quad y=\frac{2}{3}\left(e_4-e_3\right)-e_9$$

7. Найти скалярное произведение бесконечных числовых последовательностей x и y в пространстве l^2.

$$x=\left(-1,\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27},...\right),\quad y=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{8},\frac{1}{16},\frac{1}{32},...\right)$$

8. Найти норму бесконечной числовой последовательности x в пространстве l^{∞}.

$$x=\left\{\frac{\ln^4 k}{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$$

9. В пространстве $C\left[0;1\right]$ дано интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром, содержащее числовой параметр $\lambda>0$. Определить, при каких значениях параметра λ к этому уравнению применим принцип сжимающих операторов. Найти точное решение этого уравнения и сравнить с приближенным.

$$x\left(t\right)=\lambda\int\limits_0^1\left(1-ts\right)x\left(s\right)ds+t,\quad \varepsilon=10^{-3}.$$

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству «индивидуальные задания»

Шкала оценивания	Критерий оценивания
Зачтено	Правильность решения заданий составляет 90-100%
Не зачтено	Правильность решения заданий составляет менее 90%

Оценочные средства для промежуточной аттестации (экзамен)

Типовые экзаменационные билеты

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ№ 1
Дисциплина ««Общая теория рядов Фурье»

1. Метрическое пространство, основные метрические пространства
2. Дана ортонормированная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве со скалярным произведением. Найти угол между векторами x и y.

$$x = e_7 - \left(\frac{e_{23}}{2} + \frac{e_{24}}{3}\right), \quad y = 0.5\left(e_2 - 3e_{24}\right) + e_7$$

3. Пусть S – полукольцо. Доказать, что система $R = \left\{\bigcup_{i=1}^{n} A_i : A_i \in S, i = 1,2,\dots,n\right\}$ является кольцом.
4. Ряды Фурье. Определение коэффициентов по методу Эйлера-Фурье.

*Утверждено на заседании кафедры прикладной математики*_________.
*Протокол*________

Зав. кафедрой Малый В.В.
Экзаменатор Щелоков В.С.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ№ 2
Дисциплина ««Общая теория рядов Фурье»

1. Сходимость в метрическом пространстве, основные виды функциональной сходимости, полное метрическое пространство.
2. Проверить, являются ли функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ ортогональными в пространствах $L^2(a;b)$.

$$x(t) = \sqrt{1-t^2}, \quad y(t) = 4t^2 + 4t - 1, \quad (a;b) = (-1;1)$$

3. Пусть последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится по мере на множестве A. Доказать, что она фундаментальна по мере, т.е. для любых $\varepsilon > 0$ и $\gamma > 0$ существует такое N, что при n, m ≥ N выполнено неравенство

$$\mu(\{x \in A : |f_n(x) - f_m(x)| > \varepsilon\}) < \gamma .$$

4. Разложение Функций в ряд Фурье. Интеграл Дирихле.

*Утверждено на заседании кафедры прикладной математики*_________.
*Протокол*________

Зав. кафедрой Малый В.В.

Экзаменатор Щелоков В.С.

Критерии и шкала оценивания по оценочному средству промежуточный контроль (экзамен)

Шкала оценивания	Критерий оценивания
отлично (5)	Студент глубоко и в полном объёме владеет программным материалом. Грамотно, исчерпывающе и логично его излагает в устной или письменной форме. При этом знает рекомендованную литературу, проявляет творческий подход в ответах на вопросы и правильно обосновывает принятые решения, хорошо владеет умениями и навыками при выполнении практических задач.
хорошо (4)	Студент знает программный материал, грамотно и по сути излагает его в устной или письменной форме, допуская незначительные неточности в утверждениях, трактовках, определениях и категориях или незначительное количество ошибок. При этом владеет необходимыми умениями и навыками при выполнении практических задач.
удовлетворительно (3)	Студент знает только основной программный материал, допускает неточности, недостаточно чёткие формулировки, непоследовательность в ответах, излагаемых в устной или письменной форме. При этом недостаточно владеет умениями и навыками при выполнении практических задач. Допускает до 30% ошибок в излагаемых ответах.
неудовлетворительно (2)	Студент не знает значительной части программного материала. При этом допускает принципиальные ошибки в доказательствах, в трактовке понятий и категорий, проявляет низкую культуру знаний, не владеет основными умениями и навыками при выполнении практических задач. Студент отказывается от ответов на дополнительные вопросы

Лист изменений и дополнений

№ п/п	Виды дополнений и изменений	Дата и номер протокола заседания кафедры (кафедр), на котором были рассмотрены и одобрены изменения и дополнения	Подпись (с расшифровкой) заведующего кафедрой (заведующих кафедрами)

Экспертное заключение

Представленный фонд оценочных средств (далее – ФОС) по дисциплине «Общая теория рядов Фурье» соответствует требованиям ФГОС ВО.

Предлагаемые формы и средства текущего и промежуточного контроля адекватны целям и задачам реализации основной профессиональной образовательной программы по направлению подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика.

Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины представлены в полном объеме.

Виды оценочных средств, включенные в представленный фонд, отвечают основным принципам формирования ФОС.

Разработанный и представленный для экспертизы фонд оценочных средств рекомендуется к использованию в процессе подготовки обучающихся по указанному направлению.

Председатель учебно-методической комиссии факультета компьютерных систем и информационных технологий — Ветрова Н. Н.